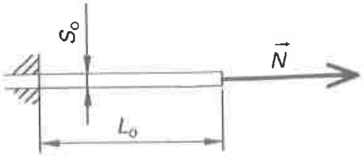
22 PIÈCE EN EXTENSION

Une pièce qui subit un effort de traction résiste si elle vérifie les conditions de résistance.

1 Contrainte normale

Soit une pièce de section initiale S_0, soumise à une force $\vec{N}$ comme l'indique la figure ci-contre.
Cette pièce subit une contrainte normale σ, exprimée en MPa,



telle que : $\boxed{\sigma = \dfrac{N}{S_0}}$

2 Condition de résistance

Il n'y aura pas rupture de la pièce si la contrainte normale σ est telle que :

$$\sigma \leqslant R_{pe} \quad \text{soit} \quad \frac{N}{S_0} \leqslant R_{pe} \quad \text{ou} \quad S_0 \geqslant \frac{N}{R_{pe}}$$

3 Déformation élastique et allongement unitaire

- Sous l'action de $\vec{N}$, la pièce s'allonge d'une **quantité** $\Delta\ell$ (mm) telle que :

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{1}{E} \times \frac{N}{S_0} \times L_0}$$

avec L_0 = longueur initiale (mm)
E = module d'élasticité (MPa)
S_0 = section initiale (mm^2)

- On appelle **allongement unitaire** (symbole ε) le rapport de l'allongement $\Delta\ell$ sur la longueur initiale L_0.

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{L_0}}$$

4 Loi de Hooke

La contrainte normale d'extension σ est proportionnelle à la déformation unitaire ε et au module d'élasticité longitudinal E du matériau composant une pièce soumise aux effets d'une force de traction.

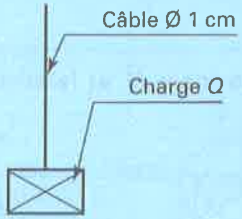
$$\boxed{\sigma = E \times \varepsilon}$$

Application

LES OUTILS POUR REUSSIR
p. 107, 123

➤ Énoncé

Un câble d'acier de 3 m de longueur, ayant un diamètre de 1 cm, s'allonge de 2 mm sous l'effet d'une charge Q.



Sachant que le module d'élasticité longitudinal de cet acier est E = 200 000 MPa, on demande de calculer :

1. l'allongement unitaire du câble ;
2. la contrainte normale σ supportée par le câble ;
3. la section S_0 du câble ;
4. la valeur de la charge Q.

◆ Éléments de solution

1. Allongement unitaire du câble :

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{L_0} = \frac{2}{3\,000} \qquad \boxed{\varepsilon = 0{,}000\,665}$$

2. Contrainte normale dans le câble :

$\sigma = E \times \varepsilon = 200\,000 \times 0{,}000\,665$

$$\boxed{\sigma = 133 \text{ MPa}}$$

3. Section du câble :

$$S_0 = \frac{3{,}14 \times D^2}{4} = \frac{3{,}14 \times 10^2}{4}$$

$$\boxed{S = 78{,}5 \text{ mm}^2}$$

4. Valeur de la charge Q :

$Q = \sigma \times S_0 = 133 \times 78{,}5$

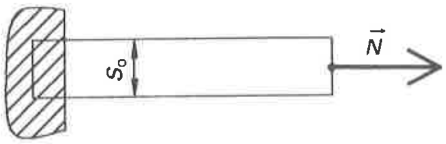
$$\boxed{Q = 10\,440 \text{ N}}$$

23 CALCUL D'UNE CONTRAINTE NORMALE, EN EXTENSION

On distingue deux situations types d'extension, dans le calcul d'une contrainte normale.

1 Situation 1

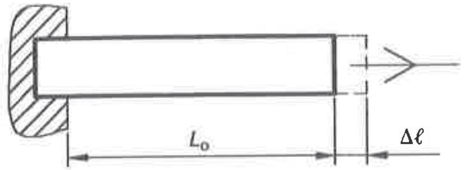
On connaît la force normale $\vec{N}$ et la section S_o supportant la contrainte d'extension.



On utilisera la relation : $\boxed{\sigma = \dfrac{N}{S_o}}$

2 Situation 2

On connaît la longueur initiale L_o de la pièce, son allongement $\Delta\ell$ provoqué par l'effort d'extension et le module de Young E qui caractérise la matière dans laquelle elle est fabriquée.



On exécutera successivement, dans ce cas :

– le calcul de l'allongement unitaire : $\boxed{\varepsilon = \dfrac{\Delta\ell}{L_o}}$

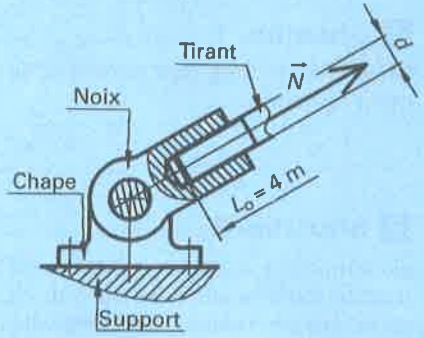
– le calcul de la contrainte : $\boxed{\sigma = E \times \varepsilon}$

Application

LES OUTILS POUR RÉUSSIR p. 107, 123

➤ Énoncé

Soit le montage d'un tirant défini par le dessin partiel ci-dessous.
On supposera que
$E = 200\ 000$ MPa.



1. Calculer la contrainte normale σ dans les deux cas suivants :
- **Hypothèse 1 :** le diamètre du tirant est $d = 20$ mm et $N = 30$ kN.
- **Hypothèse 2 :** sous l'effet de la force de traction, le tirant s'allonge de $\Delta\ell = 1{,}91$ mm.

2. Comparer les résultats de ces deux hypothèses de calcul, et conclure.

◆ Éléments de solution

1. Calcul de la contrainte σ :

• Dans le cas de l'hypothèse 1.

Section S_o du tirant :

$S_o = \pi \times R^2 = 3{,}14 \times 10^2$, soit : $\mathbf{S_o = 314\ mm^2}$.

Contrainte normale supportée par le tirant :

$\sigma = \dfrac{N}{S_o} = \dfrac{30\ 000}{314}$, soit : $\boxed{\sigma = 95{,}5\ \text{MPa}}$.

• Dans le cas de l'hypothèse 2.

Allongement unitaire ε du tirant :

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{L_o} = \frac{191}{4\ 000} = \mathbf{0{,}000\ 477\ 5}$$

Contrainte normale supportée par le tirant :

$\sigma = E \times \varepsilon = 200\ 000 \times 0{,}000\ 477\ 5$

$$\boxed{\sigma = 95{,}5\ \text{MPa}}$$

2. Conclusion :

On trouve la même valeur pour la contrainte normale. Les deux hypothèses sont donc équivalentes.

24 CALCUL D'UN ALLONGEMENT

Suivant la situation, le calcul de l'allongement d'une pièce en extension peut se présenter de différentes manières.

1 Situation 1

On connaît la longueur initiale L_0 de la pièce ainsi que son allongement unitaire ε.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{L_0} \Rightarrow \boxed{\Delta\ell = L_0 \times \varepsilon}$$

2 Situation 2

On connaît la longueur initiale L_0 de la pièce, la force normale $\vec{N}$ de traction qu'elle subit, sa section S_0, et le module de Young E qui caractérise la matière dans laquelle elle est fabriquée.

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{1}{E} \times \frac{N}{S_0} \times L_0}$$

3 Situation 3

On connaît la contrainte normale σ que subit la pièce, sa longueur initiale L_0 ainsi que le module de Young E qui caractérise la matière dans laquelle elle est fabriquée.

On exécutera successivement, dans ce cas :
- le calcul de l'allongement unitaire :

$$\sigma = E \times \varepsilon \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}}$$

- le calcul de l'allongement :

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{L_0} \Rightarrow \boxed{\Delta\ell = \varepsilon \times L_0}$$

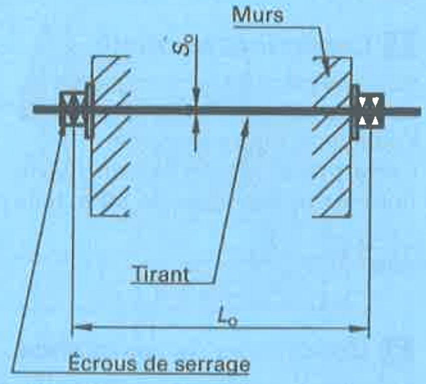
LES OUTILS POUR RÉUSSIR p. 107, 113

Application

➤ Énoncé

Un tirant de section circulaire S_0, de longueur $L_0 = 6$ m, est destiné à maintenir l'écartement de deux murs. Il est soumis à une force de traction $N = 50$ kN. On donne les caractéristiques du matériau utilisé :

$R_{pe} = 125$ MPa
$E = 250\ 000$ MPa



1. Calculer le diamètre D à donner au tirant.

2. En déduire l'allongement $\Delta\ell$ du tirant.

◆ Éléments de solution

1. Calcul du diamètre *D* à donner au tirant :

- Calcul de la section S_0 nécessaire :

$$S_0 > \frac{N}{R_{pe}} = \frac{50\ 000}{125}, \text{ soit : } \quad \mathbf{S_0 > 400\ mm^2}$$

- Calcul du diamètre D :

$$S_0 = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow D > \sqrt{\frac{4 \times S_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 400}{\pi}} = 22{,}57$$

$$\boxed{D = 23 \text{ mm}}$$

2. Valeur de l'allongement $\Delta\ell$ du tirant :

- Calcul de la section S'_0 définitive du tirant :

$$S'_0 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 529}{4}, \text{ soit : } \mathbf{S'_0 = 415{,}48\ mm^2}$$

- Calcul de l'allongement du tirant :

$$\Delta\ell = \frac{1}{E} \times \frac{N}{S'_0} \times L_0 = \frac{1}{200\ 000} \times \frac{50\ 000}{415{,}48} \times 6\ 000$$

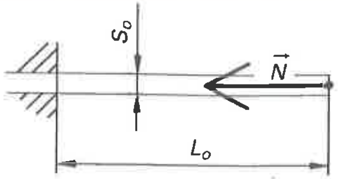
$$\boxed{\Delta\ell = 3{,}61 \text{ mm}}$$

25 PIÈCE EN COMPRESSION

Une pièce qui subit un effort de compression résiste si elle vérifie les conditions de résistance.

1 Contrainte normale

Soit une pièce de section initiale S_o, soumise à une force $\vec{N}$ comme l'indique la figure ci-contre.



Cette pièce subit une contrainte normale σ, exprimée en MPa, telle que : $\boxed{\sigma = \frac{N}{S_o}}$

2 Conditions de résistance

Il n'y aura pas rupture de la pièce si la contrainte normale σ est telle que :

$$\sigma \leqslant R_{pe} \quad \text{soit} \quad \frac{N}{S_o} \leqslant R_{pe} \quad \text{ou} \quad S_o \geqslant \frac{N}{R_{pe}}$$

3 Déformation élastique et raccourcissement unitaire

- Sous l'action de $\vec{N}$, la pièce se raccourcit d'une **quantité** $\Delta\ell$ (mm) telle que :

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{1}{E} \times \frac{N}{S_o} \times L_o}$$

avec L_o = longueur initiale (mm)
E = module d'élasticité (MPa)
S_o = section initiale (mm^2)

- On appelle **raccourcissement unitaire** (symbole ε) le rapport du raccourcissement $\Delta\ell$ sur la longueur initiale L_o.

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{L_o}}$$

4 Loi de Hooke

La contrainte normale de compression σ est proportionnelle à la déformation unitaire ε et au module d'élasticité longitudinal E du matériau composant une pièce soumise aux effets d'une force de traction.

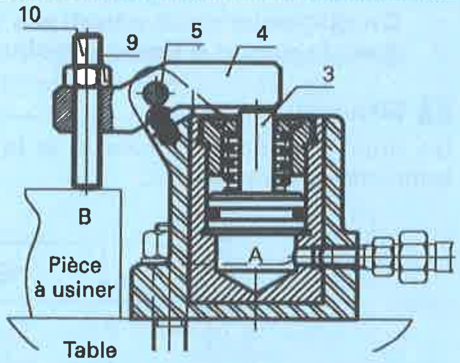
$$\boxed{\sigma = E \times \varepsilon}$$

Application

LES OUTILS POUR RÉUSSIR
p. 107, 115, 123

➤ Énoncé

On considère une bride hydraulique définie par le dessin d'ensemble ci-contre. La pression d'huile en A crée une force pressante de 5 kN sur le piston 3. Par l'intermédiaire de l'axe 5 et de la bride 4, cette force se transforme en une force de serrage en B sur la pièce à usiner.



1. Calculer la section S_o de la tige de piston dont le diamètre est ø 11 mm.
2. Calculer la contrainte σ de compression dans la tige de piston.
3. Calculer le raccourcissement unitaire ε de la tige de piston. On sait qu'il est fabriqué dans un acier dont E = 200 000 MPa.
4. En déduire le raccourcissement $\Delta\ell$ de la tige de piston, sachant que cette dernière a une longueur L_o de 30 mm.

◆ Éléments de solution

1. Section de la tige de piston :

$$S_o = \frac{3{,}14 \times D^2}{4} = \frac{3{,}14 \times 11^2}{4} \quad \text{soit :} \quad \boxed{\mathbf{S_o = 95\ mm^2}}$$

2. Contrainte normale de compression dans la tige :

$$\sigma = \frac{N}{S_o} = \frac{5\,000}{95} \quad \text{soit :} \quad \boxed{\sigma = 52{,}64 \text{ MPa}}$$

3. Raccourcissement unitaire de la tige :

$$\sigma = E \times \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{52{,}64}{200\,000} \quad \text{soit :} \quad \boxed{\varepsilon = 0{,}000\,2632}$$

4. Raccourcissement de la tige :

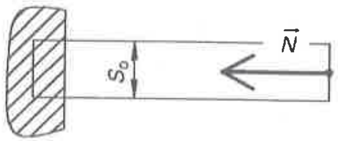
$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{S_o} \Rightarrow \Delta\ell = \varepsilon \times L_o = 0{,}000\,2632 \times 30 \quad \text{soit :} \quad \boxed{\Delta\ell = 0{,}008 \text{ mm}}$$

26 CALCUL D'UNE CONTRAINTE NORMALE, EN COMPRESSION

On distingue deux situations types de compression, dans le calcul d'une contrainte normale.

1 Situation 1

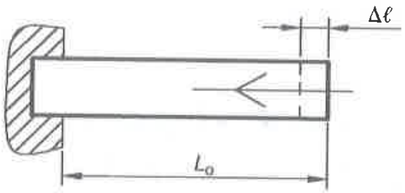
On connaît la force normale $\vec{N}$ et la section S_0 supportant la contrainte de compression.



On utilisera la relation : $\boxed{\sigma = \dfrac{N}{S_0}}$

2 Situation 2

On connaît la longueur initiale L_0 de la pièce, son raccourcissement $\Delta\ell$ provoqué par l'effort de compression, et le module de Young E qui caractérise la matière dans laquelle elle est fabriquée.



On exécutera successivement, dans ce cas :

– le calcul du raccourcissement unitaire : $\boxed{\varepsilon = \dfrac{\Delta\ell}{L_0}}$

– le calcul de la contrainte : $\boxed{\sigma = E \times \varepsilon}$

Application

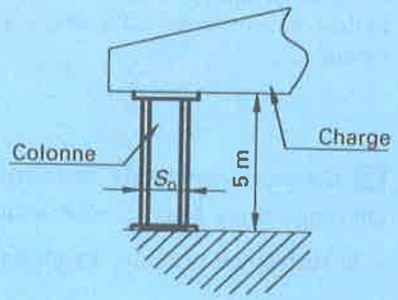
Les outils pour réussir p. 107

➤ Énoncé

Une colonne de fonte, de section S_0 de 1 dm², faisant 5 m de hauteur, supporte une charge de 100 tonnes. Sachant que la résistance pratique à la compression de cette fonte est R_{pe} = 125 MPa, on demande de :

1. Calculer la contrainte de compression σ qu'elle supporte (prendre $g = 10\ \text{N.kg}^{-1}$). En conclure si la poutre se brisera ou non.

2. En déduire le raccourcissement de cette colonne, si la fonte qui la compose a un module d'élasticité longitudinal E = 400 000 MPa.



◆ Éléments de solution

1. Calcul de la contrainte σ :

- Poids P de la charge à supporter :

$P = m \times g = 100\,000 \times 10$, soit : $\boldsymbol{P = 1\,000\,000}$ **N**

- Valeur de la contrainte de compression σ :

$\sigma = \dfrac{N}{S_0} = \dfrac{1\,000\,000}{10\,000}$ soit : $\boxed{\sigma = 100 \text{ MPa}}$

- La colonne ne se brisera pas, car on a trouvé $\sigma < R_{pe}$.

2. Raccourcissement de la colonne :

• Valeur du raccourcissement unitaire ε :

$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{100}{500\,000} = 0{,}0002$

• Valeur du raccourcissement $\Delta\ell$ de la colonne :

$\Delta\ell = \varepsilon \times L_0 = 0{,}0002 \times 5\,000$

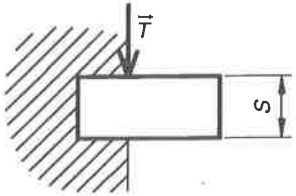
$\boxed{\Delta\ell = 1 \text{ mm}}$

27 PIÈCE EN CISAILLEMENT

Une pièce qui subit un effort tranchant résiste si elle vérifie les conditions de résistance.

1 Contrainte tangentielle

Soit une pièce de section S, soumise aux effets d'une force $\vec{T}$.



Cette pièce subit une contrainte tangentielle τ, exprimée en MPa, et qui a pour valeur :

$$\boxed{\tau = \frac{T}{S}}$$

2 Caractéristiques mécaniques du cisaillement

On rappelle les deux caractéristiques propres au cisaillement :

– la résistance pratique au glissement R_{pg} : $R_{pg} = \dfrac{R_{pe}}{2}$ (matériaux fibreux (acier, ...)) ou $R_{pg} = R_{pe}$ (matériaux granuleux (fonte, ...)) ;

– le module d'élasticité transversal G, appelé module de Young, avec $G = 0{,}4\ E$.

3 Conditions de résistance

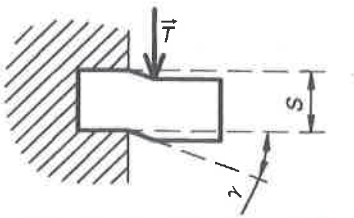
Il n'y aura pas rupture de pièce si la contrainte tangentielle τ vérifie la relation suivante :

$$\boxed{\tau \leqslant R_{pg}}$$

4 Déformation élastique

Sous l'action de $\vec{T}$, la pièce se déforme selon un angle γ de déviation, qui a pour valeur :

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{G} \times \frac{T}{S}}$$



5 Loi de Hooke

La contrainte tangentielle de cisaillement τ est proportionnelle :

– à la déformation élastique γ

– au module d'élasticité transversal G

$$\boxed{\tau = G \times \gamma}$$

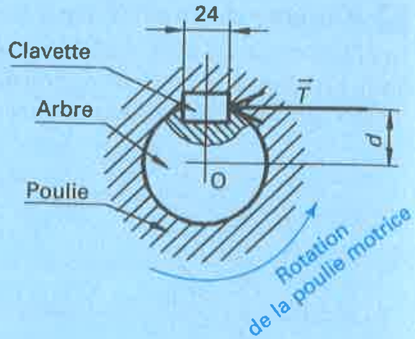
Application

LES OUTIL
POUR RÉUS
p. 107, 11
123

➤ Énoncé

Une poulie transmet à un arbre, de diamètre 80 mm, un couple moteur C = 1 200 N.m. Cette transmission se fait par l'intermédiaire d'une clavette de longueur 120 mm. Celle-ci reçoit un effort tangentiel $\vec{T}$, qui la sollicite au cisaillement.

En admettant que la distance entre le support de cette force $\vec{T}$ et l'axe de l'arbre est d = 40 mm (rayon de l'arbre), on demande :



1. Calculer l'intensité de la force tangentielle $\vec{T}$.

2. En déduire la contrainte tangentielle τ supportée par la clavette.

◆ Éléments de solution

1. Intensité de la force tangentielle $\vec{T}$:

$M_O\ \vec{T}$ = Couple moteur

$$T \times d = 1\,200 \Rightarrow T = \frac{1\,200}{d} = \frac{1\,200}{0{,}04} = 30\,000$$

$$\boxed{T = 30\ \text{kN}}$$

2. Contrainte tangentielle σ supportée par la clavette :

• Calcul de la section S sollicitée au cisaillement :

$S = 24 \times 120$, soit : **$S = 2\,880\ \text{mm}^2$**

• Calcul de la contrainte tangentielle :

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{30\,000}{2\,880}$$

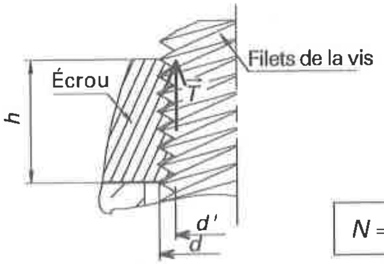
$$\boxed{\tau = 10{,}42\ \text{MPa}}$$

28 APPLICATION DE LA RÉSISTANCE AU CISAILLEMENT

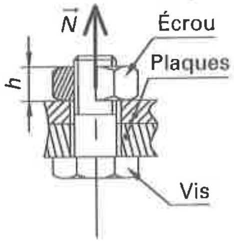
La fixation de deux (ou plusieurs) pièces par boulon sollicite la résistance des filets de la vis et de l'écrou au cisaillement.

1 Analyse de la situation de cisaillement

Les filets de la vis sont sollicités par l'écrou de serrage correspondant. En effet, à la force $\vec{N}$ de traction correspond la force tangentielle $\vec{T}$ qui sollicite les filets de la vis au cisaillement.



$$\boxed{N = T}$$



On désigne par d le diamètre nominal de la vis, et par d' le diamètre de fond de filet de celle-ci.

2 Calcul de la contrainte de cisaillement

- La section S sollicitée au cisaillement sera :

$$S = \pi \times d' \times h, \text{ avec } d' = 0{,}8 \times d$$

- La contrainte de cisaillement sera donc :

$$\boxed{\tau = \frac{1{,}25 \times N}{\pi \times d \times h}}$$

3 Relation entre h et d

Les conditions de résistance de la vis en extension et de l'écrou au cisaillement permettent d'établir une relation nécessaire entre le diamètre nominal de la vis et la hauteur de l'écrou. On trouve :

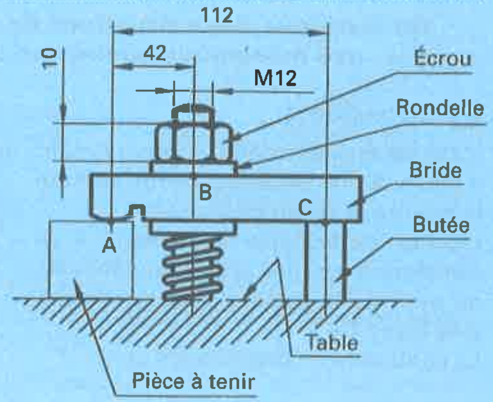
$$\left.\begin{array}{l}\sigma \leqslant R_{pe}\\ \tau \leqslant R_{pg}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{h \geqslant 0{,}4 \times d}$$

Application

Les outils pour réussir
p. 107, 115

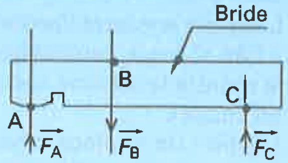
➤ Énoncé

Soit le montage défini par le dessin ci-contre, montrant une bride d'ablocage.
En agissant sur l'écrou, on crée en A une force de serrage sur la pièce à tenir sur la table de la machine-outil.
L'effort de serrage étant de 1,4 kN, on demande de calculer la contrainte tangentielle τ supportée par la vis, et de vérifier la résistance de celle-ci (on supposera que R_{pg} = 50 MPa).



◆ Éléments de solution

1. Inventaire des forces qui agissent sur la bride :
Isolons la bride. On peut alors préciser les éléments des forces qu'elle subit.



2. Calcul de l'intensité $\vec{F_B}$:
$M_C = M_C\,\vec{F_A} + M_C\,\vec{F_B} = 0$ (car la bride est en équilibre)
soit : $(-\,1\,400 \times 112) + (F_B \times 70) = 0$

$$F_B = \frac{1\,400 \times 112}{70}, \text{ soit : } \quad \mathbf{F_B = 2\,240\ N}$$

3. Calcul de la contrainte τ supportée par la vis :

$$\tau = \frac{1{,}25 \times N}{\pi \times d \times h} = \frac{1{,}25 \times 2\,240}{\pi \times 12 \times 10} \text{ soit : } \boxed{\tau = 7{,}43\ \text{MPa}}$$

4. Résistance de la vis au cisaillement :

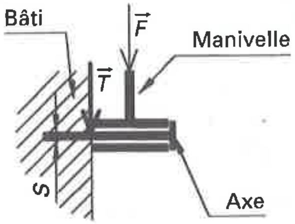
$$\left.\begin{array}{l}R_{pg} = 50\ \text{MPa}\\ \tau = 7{,}43\ \text{MPa}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\tau < R_{pg}, \text{ la vis résiste au cisaillement}}$$

29 APPLICATION AU CALCUL DES AXES MÉCANIQUES

On distingue deux situations de calcul de résistance d'un axe mécanique soumis au cisaillement.

1 Situation 1

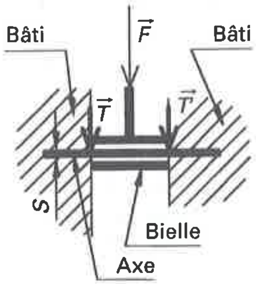
L'axe est encastré dans un corps faisant « bâti », à une seule extrémité, comme le montre le schéma ci-contre.
L'action de la pièce « manivelle » se transforme en une action tangentielle, au droit de la section d'encastrement, telle que : $T = F$.
La contrainte de cisaillement sera :



$$\boxed{\tau = \frac{F}{S}}$$

2 Situation 2

L'axe est encastré dans un corps faisant « bâti », à ses deux extrémités, comme le montre le schéma ci-contre (montage en chape).
L'action de la pièce « bielle » se transforme en deux actions tangentielles, au droit des sections d'encastrement, telle que :



$$\boxed{T = T' = \frac{F}{2}}$$

La contrainte de cisaillement sera :

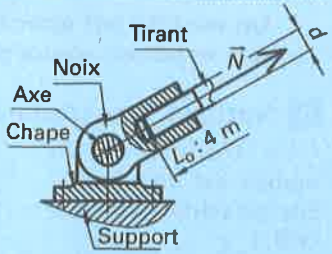
$$\boxed{\tau = \frac{F}{2S}}$$

Application

LES OUTILS POUR RÉUSSIR
p. 107, 123

➤ Énoncé

Dans le montage défini par le dessin ci-contre, un tirant, solidaire d'une noix, s'articule autour d'un axe de diamètre 20 mm, dont les extrémités sont montées serrées dans les alésages d'une chape.



Sous l'effet d'une force $\vec{N}$, le tirant de diamètre d = 20 mm s'allonge de 2 mm. Pour toutes les matières composant les pièces de ce montage, on supposera une valeur de E = 200 000 MPa.

1. Calculer l'intensité de la force de traction $\vec{N}$ subie par le tirant.
2. En déduire la contrainte tangentielle τ supportée par chacune des sections de l'axe d'articulation situées « au droit » des encastrements.

◆ Éléments de solution

1. Calcul de l'intensité N de la force de traction :

• Valeur de l'allongement unitaire ε relatif au tirant :

$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{L_0} = \frac{2}{4\,000}$, soit : **$\varepsilon$ = 0,0005**

• Valeur de la contrainte d'extension σ :

$\sigma = E \times \varepsilon = 200\,000 \times 0{,}000\,5$, soit : **$\sigma$ = 100 MPa**

• Valeur de S :

$S = \pi \times R^2 = 3{,}14 \times 10^2$, soit : **$S$ = 314 mm²**

• Valeur de N :

$N = \sigma \times S = 100 \times 314$ soit : $\boxed{N = 31\,400 \text{ N}}$

2. Calcul de la contrainte tangentielle τ supportée par une section de l'axe d'articulation :

• La force de traction N se répartit aux deux sections de l'axe situées au droit des encastrements.

• On aura donc : $\tau = \frac{N}{2\,S} = \frac{31\,400}{2 \times 314}$ soit : $\boxed{\tau = 50 \text{ MPa}}$