

Fig. 24. Efforts normal N_α et tranchant T_α dans la direction \vec{n} .

L'équilibre statique du tronçon AG montre que les efforts intérieurs se réduisent à $\vec{R}_G = \vec{F}$ en G barycentre de la section inclinée. En projetant \vec{R}_G sur n et t , on obtient l'effort normal N_α et l'effort tranchant T_α dans la coupure :

$$N_\alpha = R_G \cos \alpha = F \cos \alpha \text{ et } T_\alpha = R_G \sin \alpha = F \sin \alpha.$$

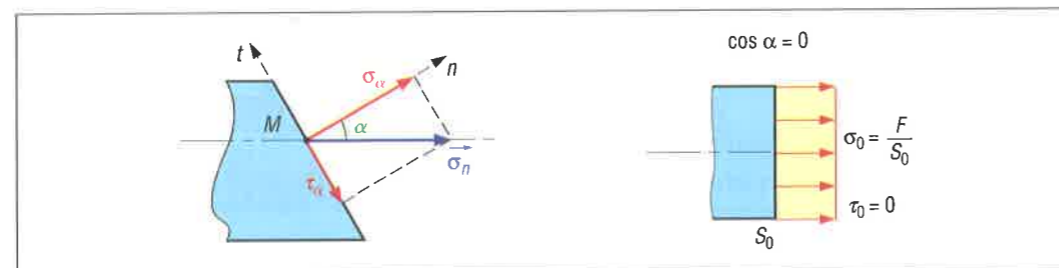


Fig. 25. Contraintes σ_α et τ_α dans la direction \vec{n} .

Les contraintes $\vec{\sigma}_n$ dans la section sont identiques en tout point et parallèles à l'axe (x) de la poutre. En projetant $\vec{\sigma}_n$ sur n et t , on obtient la contrainte normale à la coupure σ_α et tangentielle τ_α . En remarquant que $S_0 = S \cos \alpha$ ($S_0 =$ aire de la section droite et $S =$ aire de la section inclinée) et que $\sigma_0 = F/S_0$:

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{S} = \frac{N_\alpha}{S_0} \cos \alpha = \frac{F}{S_0} \cos^2 \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{S} = \frac{F \sin \alpha \cos \alpha}{S_0} = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\tau_\alpha = -\sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha$$

σ_α est maximale pour $\alpha = 0$ ($\sigma_{\alpha \text{ maxi}} = \sigma_0$)
et τ_α est maximale pour $\alpha = 45^\circ$ ($\tau_{\alpha \text{ maxi}} = 1/2 \sigma_0$).

Remarques : lorsque les matériaux ont une résistance au cisaillement plus faible, la rupture par traction ou compression se produit dans un plan incliné à 45° , plan où les contraintes de cisaillement τ_α sont maximales.

En revanche, si la résistance en traction est proportionnellement plus faible, la rupture a lieu dans une section droite ($\alpha = 0$).

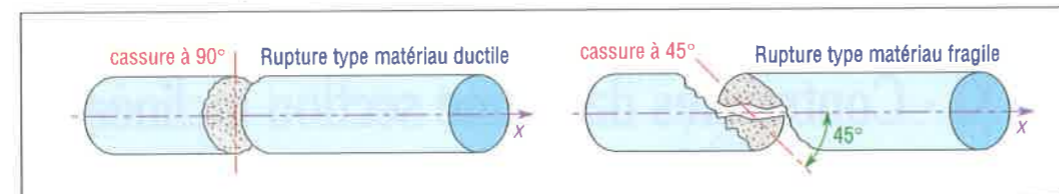


Fig. 26. Ruptures ou cassures typiques des matériaux ductiles ou malléables et des matériaux fragiles.

EXERCICES À RÉSOUDRE

QCM

Pour chaque QCM, les bonnes affirmations ou conclusions parmi celles proposées ?

- Pour une poutre, l'allongement relatif ϵ représente :
 - l'allongement mesuré entre les deux extrémités distantes de L
 - l'allongement entre deux sections distantes d'une unité de longueur
 - un rapport dont la valeur constante est un nombre sans unité
- Pour une poutre sollicitée en traction, on constate que :
 - la ligne moyenne ne bouge pas et toutes les autres fibres s'allongent
 - la ligne moyenne et toutes les fibres s'allongent différemment
 - la ligne moyenne et toutes les autres fibres s'allongent de la même valeur

- Les trois formules de base du cours de traction sont :

	Contrainte-effort intérieur	Allongements	Loi de Hooke
a)	$\sigma = N \cdot S$	$L = \epsilon \cdot \Delta L$	$\epsilon = E\sigma$
b)	$\sigma = N/S$	$\epsilon = \Delta L/L$	$\sigma = E\epsilon$
c)	$N = \sigma \cdot S$	$\Delta L = \epsilon \cdot L$	$\sigma/E = \Delta L/L$

- Les grandeurs ou constantes caractéristiques d'un matériau définies par un essai de traction pratiqué sur une éprouvette normalisée sont :

	Limite élastique du matériau	Limite à la rupture du matériau	Allongement pour cent	Coefficient de striction
a)	R_r ou σ_r	R_e ou σ_e	$A \%$	$Z \%$
b)	R_e ou σ_e	R_r ou σ_r	$100(L_u - L_0)/L_u$	$100(S_u - S_0)/S_u$
c)	R_e ou σ_e	R_r ou σ_r	$100(L_u - L_0)/L_0$	$100(S_u - S_0)/S_0$

- Pour un matériau choisi, le module d'élasticité longitudinal (E) représente :
 - l'une des constantes caractéristiques du matériau
 - la pente de la droite décrivant le comportement élastique du matériau
 - la constante de la loi de Hooke liée au matériau

- Pour un matériau donné, le coefficient de Poisson (ν) représente :
 - une constante permettant de calculer la contraction latérale des objets
 - le rapport déformation latérale sur déformation longitudinale $\nu = -\epsilon_d/\epsilon_L$
 - le rapport déformation longitudinale sur déformation latérale $\nu = -\epsilon_L/\epsilon_d$

- Lorsque les poutres présentent de brusques variations de sections, il y a phénomène de concentration de contrainte avec :

- une augmentation de la valeur des contraintes au voisinage des variations
- des sections ayant des contraintes non uniformément réparties
- des contraintes maxi obtenues par $\sigma_{\text{max}} = K_t \cdot N/S$ ($K_t > 1$ coeff. connu)

8 Le tableau ci-dessous récapitule les résultats d'un essai de traction effectué sur une éprouvette en acier à haute teneur en carbone traité thermiquement. F est la charge sur l'éprouvette et ΔL son allongement :

F (kN)	0	51,8	72	93,2	109	141,6	149,6	161	170
ΔL (mm)	0	0,0255	0,035	0,046	0,0535	0,076	0,101	0,152	0,203

F (kN)	177,2	186,8	197,6	214,4	227	235	242	246,6	rupture
ΔL (mm)	0,254	0,355	0,508	0,762	1,016	1,270	1,524	1,780	

Le diamètre initial de l'éprouvette est de 17,68 mm, le diamètre ultime de 16,41 mm, la longueur testée de 25 mm et la longueur ultime 26,75 mm.

- a) Tracer le graphe contrainte σ - déformation ϵ .
- b) En déduire R_r , R_e , E , A % et Z %.

Réponse : $R_r = 1\ 000\ \text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$; $R_e = 570\ \text{N}\cdot\text{mm}^{-2}$; $E \approx 200\ \text{GPa}$; $A\ \% = 7$; $Z\ \% = 13,85$.

9 Reprendre l'exercice 8 avec une éprouvette en alliage d'aluminium ; diamètre initial 17,82 mm ; diamètre ultime 15,93 mm ; longueur testée 250 mm ; longueur ultime 316,5 mm et résultats d'essai :

F (kN)	0	14,94	18,06	23,04	28,46	31,68	34,16	35,06	37,36
ΔL (mm)	0	0,2	0,25	0,50	1,00	1,50	2,05	2,55	3,80

F (kN)	38,44	42,08	45,28	49,90	56,04	58,72	60,86	63,08	65,12
ΔL (mm)	3,80	7,60	10,15	15,25	30,50	40,65	50,80	60,95	69,60

10 Une chaîne se compose d'une suite de maillons soudés les uns derrière les autres. La limite à la rupture de l'acier utilisé est de $63\ \text{daN}\cdot\text{mm}^{-2}$. Déterminer la force d'extension maximale \vec{F} que peut supporter la chaîne si le coefficient de sécurité adopté est de 5.

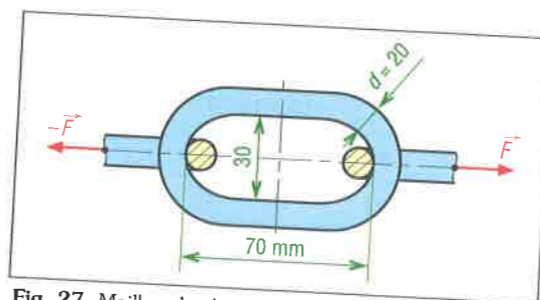


Fig. 27. Maillon de chaîne.

11 Le fer H, repéré 1 sur la figure, supporte un effort de compression de $50\ 000\ \text{daN}$. Le fer est soudé sur un plat carré en acier de côté b repéré 2. L'ensemble repose sur un support circulaire 3 en béton de diamètre d posé à même le sol. a) Calculer la section du fer H si la contrainte admissible de l'acier est de $10\ \text{daN}\cdot\text{mm}^{-2}$. b) Déterminer le côté b du carré 2 si la contrainte admissible en compression du béton est de $0,4\ \text{daN}\cdot\text{mm}^{-2}$. c) Calculer le diamètre d du socle 3 si la contrainte admissible à l'écrasement du sol est de $2,5\ \text{daN}\cdot\text{cm}^{-2}$.

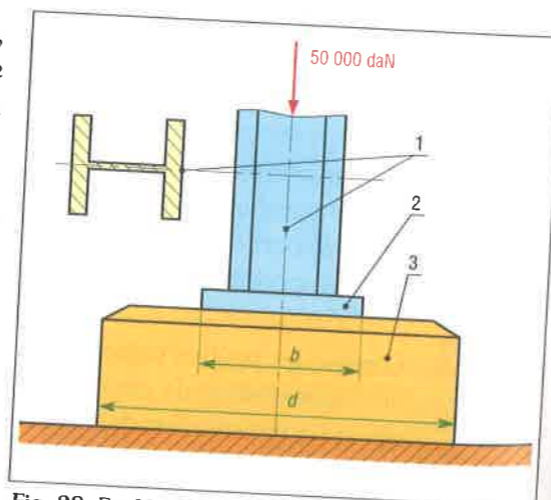


Fig. 28. Fer H.

12 Une poutre tubulaire (diamètre extérieur 400 mm, épaisseur e en acier (limite à la rupture $R_r = 380\ \text{MPa}$; limite élastique $R_e = 240\ \text{MPa}$), appartenant à la charpente métallique du Centre Pompidou à Paris, supporte un effort de traction de 400 kN. Le coefficient de sécurité adopté, par rapport à R_e , est égal à 6. a) Déterminer l'épaisseur e minimale admissible pour la construction. b) La longueur de la partie tubulaire de la poutre est de 3,5 m ; déterminer son allongement si $E = 200\ \text{GPa}$.

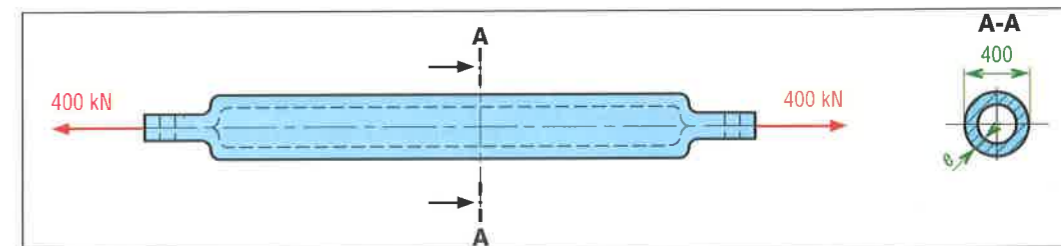


Fig. 29. Poutre tubulaire.

13 Un bloc de béton est testé en compression diamètre initial $100,000\ \text{mm}$; diamètre final $100,007\ \text{mm}$; longueur initiale $200,00\ \text{mm}$, longueur finale $199,88\ \text{mm}$; charge d'essai $F = 118\ \text{kN}$.

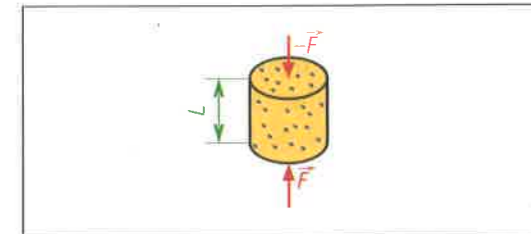


Fig. 30. Bloc de béton.

Déterminer E et le coefficient de Poisson.

Réponse : $E = 25\ \text{kN}\cdot\text{mm}^{-2}$; $\nu = 0,116$.

14 Pour contrôler la charge d'un avion, on place des jauges de contrainte sur le train d'atterrissage. Une jauge collée sur un pied de forme tubulaire donne les indications : $\epsilon_1 = 0,000\ 68$ en position déchargée et $\epsilon_2 = 0,001\ 36$ en charge.

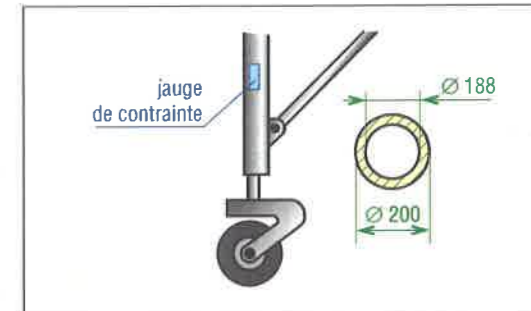


Fig. 31. Jauge de contrainte.

Déterminer la charge supplémentaire si $D = 200\ \text{mm}$, $d = 188\ \text{mm}$ et $E = 75\ \text{GPa}$.

Réponse : $\Delta p = 186,5\ \text{kN}$.

15 Une barre en fonte, $E = 100\ \text{GPa}$, $\nu = 0,3$, supporte une charge de compression de $140\ \text{kN}$. Déterminer le raccourcissement de la longueur, l'augmentation du diamètre et la diminution du volume.

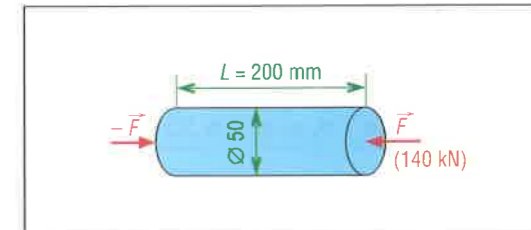


Fig. 32. Barre en fonte.

Réponse : $\Delta L = -0,1426$; $\Delta d = 0,0107$; $\Delta V = 112\ \text{mm}^3$.

16 Un plat (60×10) comporte un rétrécissement de rayon $r = 10\ \text{mm}$ et un trou de diamètre $d = 8\ \text{mm}$. Si la force de traction $F = 1\ 000\ \text{daN}$, déterminer les contraintes maximales au niveau du rétrécissement (σ_r) et au niveau du trou (σ_t).

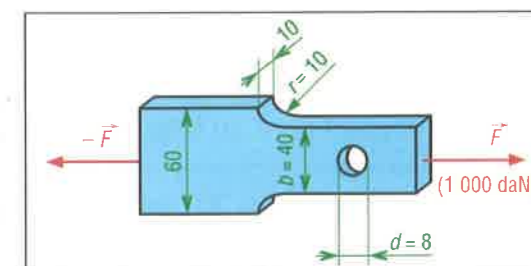


Fig. 33. Plat avec rétrécissement.

Réponse : $\sigma_r = 41,2\ \text{MPa}$; $\sigma_t = 76,6\ \text{MPa}$.

17 Reprendre l'exercice 16 avec $d = 12$ et $r = 6$. Si la contrainte admissible en traction est de 100 MPa, **déterminer** la charge F maximale tolérable.

18 Pour le plat proposé avec trou et rétrécissement, **déterminer** les contraintes maximales engendrées si la force de traction $F = 1\ 000$ daN.

Réponse :

$\sigma_t = 37,5$ MPa ;
rétrécissement $\sigma_r = 30$ MPa.

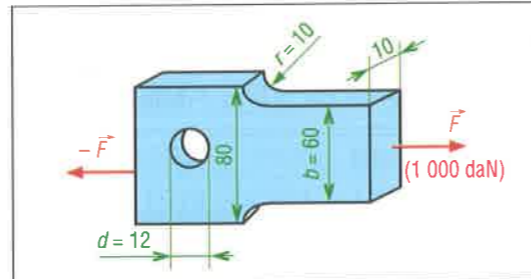


Fig. 34. Plat avec trou et rétrécissement.

19 Reprendre l'exercice 18 avec $d = 8$ et $r = 20$. Pour quelle valeur de r les contraintes au niveau du trou et du rétrécissement sont-elles égales ($\sigma_t = \sigma_r$) ?

20 Une éprouvette en aluminium ($E = 70$ GPa), symétrique, est utilisée pour un essai de traction. **a)** Si la limite élastique du matériau est de 200 MPa, **déterminer** la charge F limite correspondante et l'allongement.

b) Comparer avec une barre de section constante 60×10 .

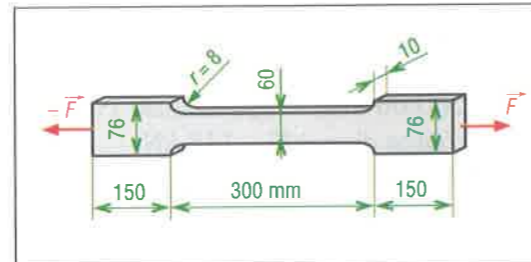


Fig. 35. Éprouvette en aluminium.

21 Une transmission est construite à partir de trois fers plats de 6,5 mm d'épaisseur, de 32 mm de largeur et de 800 mm de longueur. Au moment de l'assemblage, il apparaît que la barre centrale mesure exactement 0,75 mm de moins que les deux autres barres. **Déterminer** la contrainte dans chaque barre après assemblage ($E = 20\ 000$ daN.mm⁻²). On suppose qu'aucune charge extérieure n'est appliquée à l'ensemble monté.

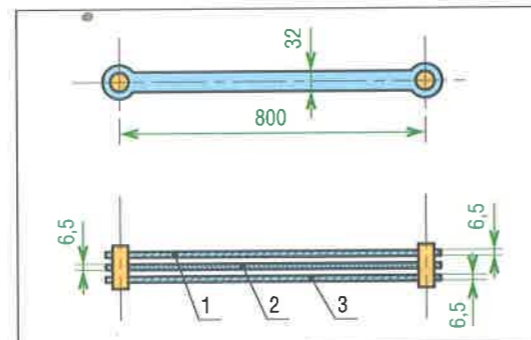


Fig. 36. Trois fer plats.

Réponse : $\sigma_1 = \sigma_3 = 6,25$ daN.mm⁻² ; $\sigma_2 = 12,5$ daN.mm⁻² (problème hyperstatique).

22 Une poutre en béton est renforcée avec 4 fers en acier de diamètre d inconnu. La poutre est rectangulaire (200×220). La contrainte admissible en compression du béton est de 7 N.mm⁻² ($E_b = 1\ 400$ daN.mm⁻²) ; celle de l'acier est de 150 N.mm⁻² ($E_a = 20\ 000$ daN.mm⁻²). Si la poutre doit supporter une charge de compression $F = 50\ 000$ daN, **déterminer** le diamètre d des fers.

Réponse : $d = 43$ mm.

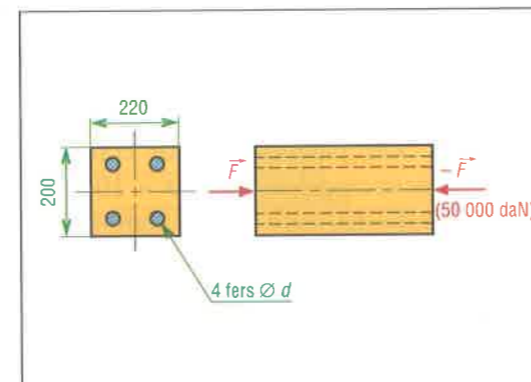


Fig. 37. Poutre en béton.

23 Le montage d'essai proposé se compose de deux barres 1 et 3 en bronze de même section ($S_1 = S_3 = 9,35$ cm²) et d'une barre 2 en acier ($S_2 = 6,25$ cm²). La barre 2 mesure 250 mm et les barres 1 et 3 mesurent 250,3 mm. On applique la charge de compression F de 30 000 daN sur le bloc 4 supposé parfaitement indéformable. **a)** Déterminer les contraintes dans les trois barres après chargement. **b)** Déterminer le raccourcissement des barres.

$E_{\text{bronze}} = 105$ GPa ; $E_{\text{acier}} = 200$ GPa.

Réponse

$\sigma_1 = \sigma_3 = 14,7$ daN.mm⁻² ; $\sigma_2 = 4,03$ daN.mm⁻² ; $\Delta L_1 = \Delta L_3 = 0,35$ mm ;
 $\Delta L_2 = 0,05$ mm.

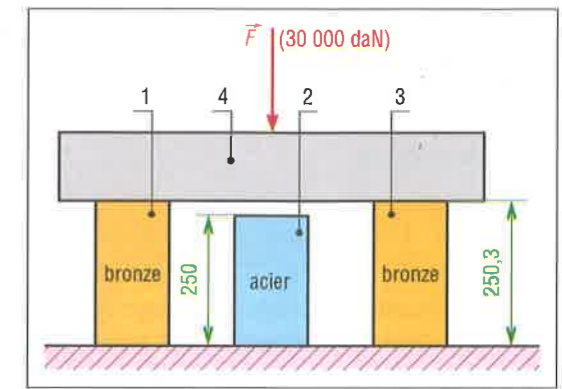


Fig. 38. Montage d'essai.

24 Deux barres de même diamètre (30 mm) sont assemblées comme l'indique la figure. Le jeu au montage est de 0,2 mm à la température ambiante. La barre 1 est en cuivre ($\alpha_c = 16,6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$; $L_c = 50$ mm ; $E = 105$ GPa) et la barre 2 en aluminium ($\alpha_a = 25 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$; $L_a = 100$; $E_a = 75$ GPa). **a)** À partir de quel accroissement de température le jeu s'annule-t-il ? **b)** Si la température croît de 150 °C, **déterminer** les contraintes et les rétrécissements des barres.

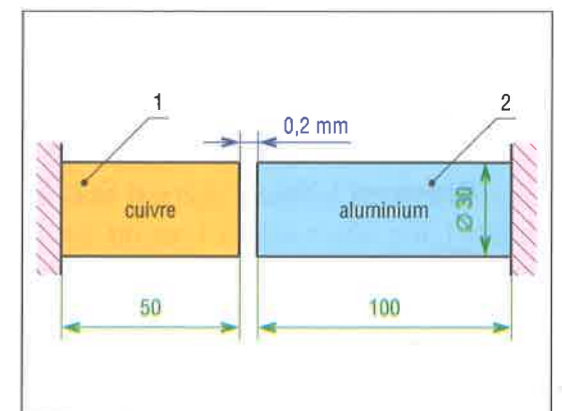


Fig. 39. Assemblage de deux barres.

Réponse

$\Delta T = 60$ °C ; $\sigma_1 = \sigma_2 = 168$ N.mm⁻² ; $\Delta L_a = 0,224$; $\Delta L_c = 0,080$.

25 Le dispositif de l'exercice 24 est utilisé comme système de contrôle thermique, le cuivre est remplacé par du laiton ($E_L = 103$ GPa ; $L_L = 20$; section 50 mm² ; $\alpha_L = 19,1 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) et l'aluminium par du magnésium ($E_m = 45$ GPa ; $L_m = 30$; section 100 mm² ; $\alpha_m = 26,1 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$). **Reprendre** les mêmes questions si le jeu initial est de 0,1 mm.

26 Les trois barres AB, AC et AD, de même longueur initiale L_0 , même section S_0 , fabriquées avec le même matériau, supporte en A, articulation commune, la charge horizontale \vec{F} . Les barres sont articulées en B, C et D sur un bâti supposé indéformable. **Déterminer** les efforts intérieurs dans les trois barres et les allongements respectifs.

Réponse

$N_{AC} = F/(1 + 2 \cos^2 \theta)$; $N_{AB} = N_{AD} = N_{AC} \cos \theta$;
 $\Delta L_{AC} = FL/[ES(1 + 2 \cos^2 \theta)]$; $\Delta L_{AB} = \Delta L_{AD} = \Delta L_{AC} \cos \theta$.

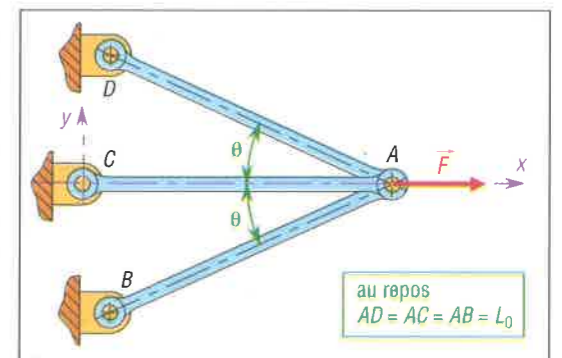


Fig. 40. Assemblage de trois barres.

OBJECTIFS

- Définir l'effort tranchant T , la contrainte de cisaillement τ , l'angle de glissement γ , le module d'élasticité transversal G et la loi liant τ avec γ .
- Donner quelques applications usuelles du cisaillement.

27 Reprendre l'exercice 26 ; F est supposée nulle, on augmente la température de la barre AC de ΔT .

Réponse : $N_{AC} = 2E \cdot S \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot \cos^2 \theta / (1 + 2 \cos^2 \theta)$ en compression $N_{AB} = N_{AD} = N_{AC} / \cos \theta$ en traction.

28 Un poteau de soutènement en béton, hauteur h , section droite (S) constante supporte la charge axiale \vec{F} de 50 000 daN exercée par la masse d'un pont. La masse volumique du béton est $\rho = 1\,600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $h = 10 \text{ m}$; $E_{\text{béton}} = 40 \text{ GPa}$; contrainte admissible du béton $\sigma_{\text{adm}} \leq 1 \text{ MPa}$; le poids propre du béton n'est pas négligé.

- Déterminer l'effort normal $N(z)$ en G à z de A .
- Déterminer la valeur de $N(z)$ entre A et B .
- Calculer la section minimale de (S) .
- Calculer le raccourcissement du poteau.

Réponses : $N(z) = F + (h - z) \rho g$; $S \geq 0,595 \text{ m}^2$; $\Delta h = 0,23 \text{ m}$.

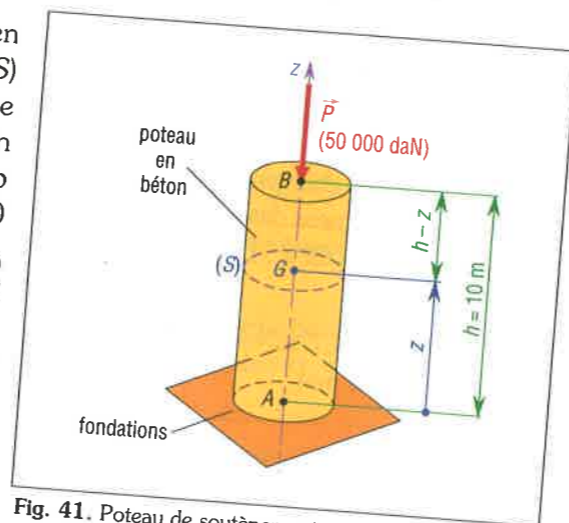


Fig. 41. Poteau de soutènement.

29 Deux poutres en bois de section rectangulaire ($a \times b$) sont collées comme l'indique la figure, $\alpha = 30^\circ$; $a = 100 \text{ mm}$; $b = 60 \text{ mm}$. Si la charge de traction supportée est $F = 1\,000 \text{ daN}$, déterminer les contraintes normales et tangentielles dans le joint collé.

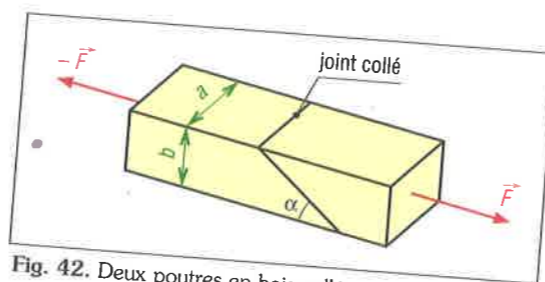


Fig. 42. Deux poutres en bois collées.

30 Reprendre l'exercice 29 avec $\alpha = 65^\circ$; $a = 120$; $b = 80$ et $F = 400 \text{ daN}$.

Réponse : $\sigma_a = 0,342 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$; $\tau_a = 0,160 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$.

21 Reprendre l'exercice 29 avec $a = 120$; $b = 80$ et $F = 960 \text{ daN}$. On impose les contraintes admissibles $\sigma_a = 1,1 \text{ MPa}$ et $\tau_a = 1,4 \text{ MPa}$ dans le joint collé. Quels sont les coefficients de sécurité de l'assemblage pour $\alpha = 20^\circ$; $\alpha = 35^\circ$; $\alpha = 45^\circ$ et le mode de rupture aux charges élevées ?

Réponse : $S_{20} = 4,35$ (cisaillement) ; $S_{35} = 2,98$ (cisaillement) ; $S_{45} = 2,2$ (traction).

27 Un tube de 400 mm de diamètre est réalisé à partir d'une tôle d'épaisseur $e = 6 \text{ mm}$ soudée en hélice (angle d'hélice = 22°). Déterminer les contraintes normale et tangentielle dans le cordon si l'effort de compression supporté par le tube est $F = 300 \text{ kN}$.

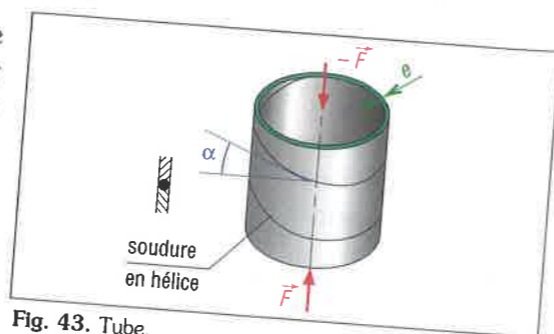


Fig. 43. Tube.

Le cisaillement bien qu'assez semblable à la traction dans sa structure et ses formules analogues (loi de Hooke...) est un peu moins varié par l'étendu de son contenu. Il n'y a pas de phénomène de concentration de contraintes, d'hyperstatisme...

Les essais de cisaillement sont en général pratiqués sur des machines d'essais de traction avec des éprouvettes adaptées (exemple : cas des adhésifs ou colles). Les exemples de solides ou de composant sollicités au cisaillement sont nombreux : articulations ou pivots de dispositifs divers, assemblages rivetés ou boulonnés, assemblages collés, cordons de soudures, etc.

Hypothèses : l'étude du cisaillement suppose des moments fléchissants ($M_{fz} = F \cdot \Delta L = 0$ figure ci-dessous) nuls ou négligeables (résulte de $\Delta L \approx 0$). Les allongements des diverses génératrices sont aussi négligés ($I_0 J_0 \approx I J...$). De ce fait il n'y a pas de contrainte normale (σ) et seules existent des contraintes tangentielles (τ).

